Definizioni

- Serie di dati: $Y_N=\{y(1),y(2),...y(N)\},y(t)\in R\,\forall t\in N$;
- Processo stocastico (PS):
  $Y_N(s)=\{y(1,s),y(2,s),...y(N,s)\},\ y(i)\,variabile\ casuale,s\ esperimento\ generico$;
- Realizzazione di un PS:
  $Y_N(\bar{s})=\{y(1,\bar{s}),y(2,\bar{s}),...y(N,\bar{s})\},\ y(i)\,variabile\ casuale,\bar{s}\ realizzazione\ di\ s$; per semplicità di scrittura solitamente si omettono s e $\bar{s}$;
- Processo stocastico stazionario (PSS): PS per cui il valore atteso non varia in funzione del tempo ($E[y(t)]=m_y\forall t$) e per cui la covarianza dipende solo dall'ampiezza dell'intervallo di tempo tra due campioni ($\gamma_y(t_1,t_2)=\gamma_y(t_3,t_4)=\gamma_y(\tau)$ $\forall t1,t2,t3,t4\ t.c.\ |t1-t2|=|t3-t4|,\tau=|t1-t2|$);
- Rumore bianco $e(t)$ (WN): variabile casuale con media costante m_e e covarianza $\gamma_e(\tau)=\begin{cases}\lambda^2 & \tau=0\\ 0 & \tau\neq 0\end{cases}$;
- Stimatore corretto della media: $\hat{m}_y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y(i)$; è consistente se $\gamma_y(\tau)\to 0$ se $\tau\to\infty$;
- Stimatore corretto della covarianza $\hat{\gamma}_y(\tau)=\frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau}(y(i)-m_y)(y(i+\tau)-m_y)$; è consistente se $\gamma_y(\tau)\to 0$ se $\tau\to\infty$;
- Stimatore non corretto della covarianza $\hat{\hat{\gamma}}_y(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-\tau}(y(i)-m_y)(y(i+\tau)-m_y)$; è corretto asintoticamente;
- Sistemi N-ARMAX: y(t) una funzione continua di
  - $e(t)$;
  - valori passati di $y(t)$: $y(t-1),y(t-2),...$ modelli AR (parte autoregressiva);
  - valori passati di $e(t)$: $e(t-1),e(t-2),...$ modelli MA (parte a media mobile);
  - valori passati di un ingresso ritardato $u(t-k)$: $u(t-k-1),u(t-k-2),...$ modelli X (parte esogena);
- la N viene aggiunta per i modelli non lineari;
- Sistemi AR(n), detti "All poles": $y(t)=a_1y(t-1)+a_2y(t-2)+...+a_ny(t-n)$;
- Sistemi MA(m), detti "All zeros": $y(t)=c_0e(t)+c_1e(t-1)+...+c_me(t-m)$;
- Sistemi ARMA(n,m): $y(t)=a_1y(t-1)+...+a_ny(t-n)+c_0e(t)+...+c_me(t-m)$;
- Sistemi ARMAX(n,m,k,p):
  $y(t)=a_1y(t-1)+...+a_ny(t-n)+c_0e(t)+...+c_me(t-m)+b_0u(t-k)+...+b_pu(t-k-p)$;
- Densità spettrale di potenza o spettro: $\Gamma_y(\omega)=\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty}\gamma_y(\tau)e^{-j\omega\tau}$;
- Zero bloccante: zero per cui è verificata $|Z_i|=1$;

- Polo risonante: polo per cui è verificata $|P_i| \approx 1$;
- Stimatore dello spettro: $\hat{\Gamma}_y(\omega) = \sum_{\tau=1}^{N-1} \hat{\gamma}_y(\tau) e^{j\omega\tau}$;
- Stimatore regolarizzato dello spettro: $\hat{\hat{\Gamma}}_y(\omega) = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^{Q} \hat{\Gamma}_i(\tau)$ dove $\hat{\Gamma}_i(\tau)$ è calcolato sui campioni da $\frac{(i-1)N}{Q}$ a $\frac{iN}{Q}$.
- Filtro passa-tutto: sistema dinamico lineare a tempo discreto espresso dalla funzione di trasferimento $W_{AP}(Z) = \frac{1}{a} \frac{Z+a}{Z+\frac{1}{a}}, a \in \Re$;
- Filtro in forma canonica: sistema dinamico lineare a tempo discreto espresso come funzione di trasferimento $W(Z) = \frac{C(Z)}{A(Z)}$ dove:
  - $C(Z)$ ed $A(Z)$ sono coprimi, ossia $C(Z)=0$ e $A(Z)=0$ non hanno radici in comune;
  - $C(Z)$ ed $A(Z)$ sono dello stesso ordine;
  - $C(Z)$ ed $A(Z)$ sono monici, ossia il coefficiente del termine di grado massimo è 1;
  - gli zeri di $C(Z)$ sono tutti a fase minima, i poli di $A(Z)$ sono tutti stabili.
- Processo in forma canonica: processo del tipo $y(t) = W(Z)e(t)$ dove $W(Z)$ è in forma canonica;
- Predittore: funzione $\hat{y}(t|t-k)$ che i stima i valori di $y(t)$ noti i campioni dall'inizio dei tempi a $t-k$;
- Errore di predizione: $\epsilon(t) = |\hat{y}(t|t-k) - y(t)|$;
- Predittore ottimo: predittore per cui:
  - $E[\hat{y}(t|t-k)\epsilon(t)] = 0$ l'errore di predizione non è correlato con la predizione stessa;
  - $V[\epsilon(t)]$ è la minima possibile;
- Identificazione RLS con oblio: identificazione RLS in cui la cifra di merito "pesa" l'errore di predizione in base al tempo; in particolare riduce il peso dell'errore in istanti lontani nel tempo ($\approx \frac{3}{1-\rho}$ passi); $J = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N} \rho^{N-t} \epsilon(t)^{2,} 0 < \rho < 1$;
- Uno stato $\bar{x}$ di un sistema Σ si dice raggiungibile se partendo dallo stato iniziale nullo x_0 esiste un ingresso $y(t)$ tale che $x(t) = \bar{x}$ con t finito;
- Un sistema Σ si dice completamente raggiungibile se ogni possibile stato $\bar{x}$ è raggiungibile;
- Un sistema Σ si dice osservabile quando, a partire da due stati iniziali $x_1 \neq x_2$ vale $y_1(t) \neq y_2(t) \forall t$;
- La matrice di raggiungibilità R di un sistema Σ è $R = [F \quad FG \quad F^{2G} \quad ... \quad F^{N-1}G]$ (matrici accostate per colonne);
- La matrice di osservabilità O di un sistema Σ è $O = [H \quad HF \quad HF^2 \quad ... \quad HF^{N-1}]^T$

(matrici accostate per righe);

Teoremi non dimostrati

Teorema 1: l'uscita di un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile con un PSS in ingresso è un PSS.

Teorema 2: combinazioni lineari di PSS sono PSS.

Teorema 3 (filtri in forma canonica): ogni filtro $W(Z)=\frac{C(Z)}{A(Z)}$ può essere espresso in forma canonica.

Teorema 4 (positività dello spettro): $\Gamma_y(\omega)\geq 0\ \forall\omega$.

Teorema 5 (inversa dello spettro): $\gamma_y(\tau)=\frac{1}{2\tau}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$.

Teorema 6 (di Parceval): lo spettro dell'uscita di un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile con funzione di trasferimento $W(Z)$ alimentato con un PSS in ingresso è un PSS di spettro $\Gamma_y(\omega)=|W(e^{j\omega})|^2\Gamma_u(\omega)$ dove $|W(e^{j\omega})|^2$ è il quadrato del modulo di W calcolata in $e^{j\omega}$, ossia $W(e^{j\omega})W(e^{-j\omega})$.

Teorema 7 (metodo grafico di rappresentazione dello spettro): lo spettro dell'uscita di un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile con funzione di trasferimento $W(Z)$ alimentato con un PSS può essere rappresentato nel seguente modo. Sia C la circonferenza goniometrica rappresentata sul piano di Gauss insieme ai poli P_i e agli zeri Z_i di $W(Z)$ e $C(\omega)$ il punto sulla circonferenza di coordinate $(\cos(\omega),\sin(\omega))$. Lo spettro può essere disegnato approssimativamente tenendo conto che:

$$\Gamma_y(\omega)=\frac{\prod_{i=1}^{n_P}(distanza\,tra\,C(\omega)\,e\,P_i)}{\prod_{i=1}^{n_Z}(distanza\,tra\,C(\omega)\,e\,Z_i)}\ .$$

Teorema 7 (inconsistenza di $\hat{\Gamma}_y(\omega)$): si dimostra che $E[\hat{\Gamma}_y(\omega)-\Gamma_y(\omega)]\rightarrow\Gamma_y(\omega)^2$, ossia l'errore di stima compiuto dipende dal quadrato dello spettro.

Teorema 8 (incorrelazione di $\hat{\Gamma}_y(\omega)$): si dimostra che $E[(\hat{\Gamma}_y(\omega_1)-\Gamma_y(\omega_1))(\hat{\Gamma}_y(\omega_2)-\Gamma_y(\omega_2))]\rightarrow 0$ quando $N\rightarrow\infty\wedge\omega_1\neq\omega_2$.

Teorema 9 (errore di stima di $\hat{\hat{\Gamma}}_y(\omega)$): si dimostra che quando $N\rightarrow\infty$

$$E[\hat{\Gamma}_y(\omega)-\Gamma_y(\omega)]\rightarrow\frac{1}{Q}\Gamma_y(\omega)^2\ .$$

Teorema 11 (condizione di raggiungibilità): un sistema è completamente raggiungibile se la sua matrice di raggiungibilità R ha rango pari all'ordine del sistema.

Teorema 10 (condizione di osservabilità): un sistema è osservabile se la sua matrice di osservabilità O ha rango pari all'ordine del sistema.

Dimostrazioni

Ipotesi di tutte le dimostrazioni:

- Y_N è un PSS, sono noti il valor medio $E[y(i)]=m_y$ e la varianza $V[y(i)]=\gamma_y(0)$ di $y(i)$.

$\hat{m}_y$ *è corretto*

$$E[\hat{m}_y]=E[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y(i)]$$

$$E[\hat{m}_y]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[y(i)]$$

$$E[\hat{m}_y]=\frac{N}{N} m_y=m_y$$

$\hat{\gamma}_y(\tau)$ *è corretto*

$$E[\hat{\gamma}_y(\tau)]=E[\frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau}(y(i)-m_y)(y(i+\tau)-m_y)]$$

$$E[\hat{\gamma}_y(\tau)]=\frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau} E[(y(i)-m_y)(y(i+\tau)-m_y)]$$

$$E[\hat{\gamma}_y(\tau)]=\frac{N-\tau}{N-\tau}\gamma_y(\tau)=\gamma_y(\tau)$$

Formula semplificata della covarianza

$$\gamma_y(\tau)=E[(y(t)-m_y)(y(t+\tau)-m_y)]$$

$$\gamma_y(\tau)=E[y(t)y(t+\tau)-m_y y(t)-m_y y(t+\tau)+{m_y}^2]$$

$$\gamma_y(\tau)=E[y(t)y(t+\tau)]-m_y^2-m_y^2+m_y^2$$

$$\gamma_y(\tau)=E[y(t)y(t+\tau)]-m_y^2$$

La covarianza è indipendente dalla media

$$\gamma_y(\tau)=E[(y(t)-m_y)(y(t+\tau)-m_y)]$$

Definisco una variabile “depolarizzata”:

$$\tilde{y}(t)=y(t)-m_y$$

$$\gamma_y(\tau)=E[(y(t)-m_y)(y(t+\tau)-m_y)]=E[(\tilde{y}(t))(\tilde{y}(t+\tau))]=\tilde{\gamma}_y(\tau)$$

La covarianza di y è identica a quella di $\tilde{y}$.

Valore atteso di un sistema MA(m)

$$y(t)=c_0 e(t)+c_1 e(t-1)+...+c_m e(t-m)$$

$$E[y(t)]=E[c_0 e(t)+c_1 e(t-1)+...+c_m e(t-m)]$$

$$E[y(t)]=c_0E[e(t)]+c_1E[e(t-1)]+...+c_mE[e(t-m)]$$

$$E[y(t)]=m_e\sum_{i=0}^{m}c_i$$

Covarianza di un sistema MA(m)

Senza perdere di generalità si ipotizza $m_y=0 \wedge m_e=0$.

$$y(t)=c_0e(t)+c_1e(t-1)+...+c_me(t-m)$$

$$\gamma_y(\tau)=E[y(t)y(t+\tau)]$$

$$\gamma_y(\tau)=E[(c_0e(t)+c_1e(t-1)+...+c_me(t-m))(c_0e(t+\tau)+c_1e(t-1+\tau)+...+c_me(t-m+\tau))]$$

Sviluppando il prodotto e sfruttando la linearità di E si hanno due possibili tipi di addendo:

- $c_jc_jE[e(t1)e(t2)]=0$;
- $c_ic_{i+\tau}E[(e(t))^2]=c_ic_{i+\tau}\lambda^2$;

Pertanto la scrittura può essere sintetizzata come segue:

$$\gamma_y(\tau)=\lambda^2\sum_{i=0}^{m-\tau}c_ic_{i+\tau}$$

Valore atteso di un sistema AR(n)

$$y(t)=a_1y(t-1)+a_2y(t-2)+...+a_ny(t-n)+e(t)$$

$$E[y(t)]=E[a_1y(t-1)+a_2y(t-2)+...+a_ny(t-n)+e(t)]$$

$$E[y(t)]=m_y\sum_{i=1}^{n}a_i+m_e=m_y$$

$$m_y=\frac{m_e}{1-\sum_{i=1}^{n}a_i}$$

Ogni sistema AR(1) è esprimibile come MA(∞)

Trattandosi di un sistema di ordine 1 $a_i=0\,\forall\, i>1$, e per semplicità di scrittura si pone $a_1=\alpha$.

Il sistema si può quindi descrivere con la seguente equazione:

$$y(t)=\alpha y(t-1)+e(t)$$

$y(t)$ si può anche scrivere come una combinazione lineare di $e(t)$. Infatti:

$$y(t)=\alpha y(t-1)+e(t)$$

$$y(t)=\alpha(\alpha y(t-2)+e(t-1))+e(t)$$

$$y(t)=\alpha^2y(t-2)+\alpha e(t-1)+e(t)$$

$$y(t)=\alpha^2(\alpha y(t-3)+e(t-2))+\alpha e(t-1)+e(t)$$

$$y(t)=\alpha^3y(t-3)+\alpha^2e(t-2)+\alpha e(t-1)+e(t)$$

Il calcolo può procedere ricorsivamente, e quindi è riassumibile come:

$$y(t)=\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i e(t-i)$$

Quest'ultima forma è identica alla definizione di un MA(∞) con $c_i=\alpha^i \forall i$.

Ogni sistema AR(n) è esprimibile come MA(∞)

Ogni sistema AR(n) si può descrivere con la seguente equazione:

$$y(t)=e(t)+a_1 y(t-1)+a_2 y(t-2)+...+a_n y(t-n)$$

E' possibile ragionare come al punto precedente ed esprimere ogni termine come combinazione lineare di $e(t)$ nei vari istanti di tempo. Pertanto è lecito scrivere:

$$y(t)=\sum_{i=0}^{\infty} A_i e(t-i)$$

con A_i coefficienti opportuni.

Ogni sistema ARMA(n,m) è esprimibile come MA(∞)

Come visto nel punto precedente, ogni sistema AR(n) si può esprimere come MA(∞), quindi è possibile ridurre l'equazione generale dell'ARMA:

$$y(t)=a_1 y(t-1)+...+a_n y(t-n)+c_0 e(t)+...+c_m e(t-m)$$

nella forma seguente:

$$y(t)=\sum_{i}^{\infty} A_i e(t-i)+c_0 e(t)+...+c_m e(t-m)$$

che è anch'essa una combinazione lineare di $e(t)$ nei vari istanti di tempo. Pertanto la scrittura può essere ulteriormente compattata come segue:

$$y(t)=\sum_{i}^{\infty} B_i e(t-i)$$

con B_i coefficienti opportuni.

Covarianza di un sistema AR(1)

Senza perdere di generalità si ipotizza $m_y=0 \wedge m_e=0$.

Quindi:

$$y(t)=\alpha y(t-1)+e(t)$$

$$\gamma_y(\tau)=E[y(t)y(t-\tau)]$$

$$\gamma_y(\tau)=E[(\alpha y(t-1)+e(t))y(t-\tau)]$$

$$\gamma_y(\tau)=E[\alpha y(t-1)y(t-\tau)+e(t)y(t-\tau)]$$

$$\gamma_y(\tau)=\alpha E[y(t-1)y(t-\tau)]+E[e(t)y(t-\tau)]$$

$$\gamma_y(\tau)=\alpha \gamma_y(\tau-1)+E[e(t)y(t-\tau)]$$

Per il punto precedente,

$y(t-\tau)=\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i e(t-\tau-i)$ quindi:

$$\gamma_y(\tau)=\alpha\gamma_y(\tau-1)+E[e(t)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i e(t-\tau-i)]$$

L'ultimo termine a secondo membro è riconducibile ad espressioni di covarianza di $e(t)$ in istanti di tempo diversi, quindi per definizione è nullo. Si ha:

$$\gamma_y(\tau)=\alpha\gamma_y(\tau-1)$$

Per completare la definizione ricorsiva si calcola $\gamma_y(0)$:

$$\gamma_y(0)=E[y(t)^2]$$

$$\gamma_y(0)=E[(\alpha y(t-1)+e(t))(\alpha y(t-1)+e(t))]$$

$$\gamma_y(0)=E[(\alpha y(t-1)+e(t))(\alpha y(t-1)+e(t))]$$

$$\gamma_y(0)=E[(\alpha y(t-1)^2+2\alpha y(t-1)e(t)+e(t)^2)]$$

$\gamma_y(0)=\alpha E[y(t-1)^2]+2\alpha E[y(t-1)e(t)]+E[e(t)^2]$ e per stazionarietà di $y(t)$:

$\gamma_y(0)=\alpha\gamma_y(0)+\lambda^2$, quindi

$\gamma_y(0)=\dfrac{\lambda^2}{1-\alpha}$. Concludendo si può scrivere:

$\gamma_y(\tau)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^2}{1-\alpha} & \tau=0\\ \alpha\gamma_y(\tau-1) & \tau\neq 0\end{cases}$ che è detta equazione di Yule-Walker.

Lo spettro è una funzione reale

Lo spettro è definito come una serie:

$$\Gamma_y(\omega)=\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty}\gamma_y(\tau)e^{-j\omega\tau}$$

I termini della sommatoria possono essere:

- $\gamma_y(0)$, per $\tau=0$;
- coppie di complessi coniugati, in particolare $\gamma_y(k)e^{\pm j\omega\tau}$ per ogni $\tau=\pm k$ poiché γ_y è pari.

Notando che la somma di una coppia di complessi coniugati è riconducibile a un numero reale tramite la formula di Eulero:

$$\frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}=\cos(\alpha)$$

ossia:

$$\gamma_y(k)e^{j\omega k}+\gamma_y(k)e^{-j\omega k}=2\cos(\omega k)\gamma_y(k)$$

si può concludere che $\Gamma_y(\omega)$ è una somma di numeri reali, quindi ha codominio $\Re$.

Lo spettro è pari

Per quanto descritto nella dimostrazione precedente, $\Gamma_y(\omega)$ può essere scritta come:

$$\Gamma_y(\omega)=\gamma_y(0)+\sum_{k=1}^{\infty}2\cos(\omega k)\gamma_y(k)$$

ma questa è una combinazione lineare di funzioni pari in ω , quindi è pari.

Lo spettro è periodico

Per le stesse considerazioni di cui sopra, $\Gamma_y(\omega)$ è una combinazione lineare di $\cos(\omega k)$, la quale è una funzione periodica di periodo 2π . Si conclude che anche $\Gamma_y(\omega)$ è una funzione periodica di periodo 2π .

Lo spettro è invariante rispetto alla media

Dal momento che lo spettro è definito come la serie:

$$\Gamma_y(\omega)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\gamma_y(\tau)e^{-j\omega\tau}$$

ed ogni elemento della sommatoria è invariante rispetto alla media (in particolare la covarianza) si conclude che lo spettro stesso non è influenzato dalla media di $y(i)$.

Spettro della somma di segnali scorrelati

Siano $y_1(i)$ ed $y_2(i)$ due segnali completamente scorrelati, ossia $y_1(i)\perp y_2(i)$. Per la definizione di correlazione, deve valere:

$$\gamma_{y_1+y2}(\tau)=\gamma_{y_1}(\tau)+\gamma_{y_2}(\tau)$$

quindi:

$$\Gamma_{y1+y2}(\omega)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\gamma_{y1+y2}(\tau)e^{-j\omega\tau}=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}[\gamma_{y1}(\tau)+\gamma_{y2}(\tau)]e^{-j\omega\tau}$$

$$\Gamma_{y_1+y_2}(\omega)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\gamma_{y_1}(\tau)e^{-j\omega\tau}+\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\gamma_{y_2}(\tau)e^{-j\omega\tau}$$

$$\Gamma_{y_1+y_2}(\omega)=\Gamma_{y_1}(\omega)+\Gamma_{y_2}(\omega) \quad .$$

$\hat{\Gamma}_y(\omega)$ non è corretto

Lo stimatore è definito come:

$$\hat{\Gamma}_y(\tau)=\sum_{\tau=1}^{N-1}\hat{\gamma}_y(\tau)e^{-j\omega\tau}$$

quindi

$$E[\hat{\Gamma}_y(\tau)]=E[\sum_{\tau=1}^{N-1}\hat{\gamma}_y(\tau)e^{-j\omega\tau}]$$

e per linearità di E:

$$E[\hat{\Gamma}_y(\tau)]=\sum_{\tau=1}^{N-1}E[\hat{\gamma}_y(\tau)]e^{-j\omega\tau} \quad .$$

Dal momento che $\hat{\gamma}_y$ è corretto si può anche scrivere:

$$E[\hat{\Gamma}_y(\tau)]=\sum_{\tau=1}^{N-1}\gamma_y(\tau)e^{-j\omega\tau}\neq\Gamma_y(\tau)$$

dunque lo stimatore non è corretto (lo è asintoticamente in quanto $N-1\rightarrow\infty$).

$\hat{\hat{\Gamma}}_y(\omega)$ *è asintoticamente corretto*

Per la linearità di E si può scrivere:

$$E[\hat{\hat{\Gamma}}_y(\omega)]=\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{Q}E[\hat{\Gamma}_i(\omega)]$$

$$E[\hat{\hat{\Gamma}}_y(\omega)]=\frac{Q}{Q}E[\hat{\Gamma}_i(\omega)]$$

Ma dal momento che il processo è stazionario $\Gamma_i(\omega)=\Gamma_y(\omega)\,\forall i$ quindi:

$$E[\hat{\hat{\Gamma}}_y(\omega)]=\Gamma_y(\omega)\quad .$$

Il filtro passa-tutto non modifica media e funzione di covarianza

Si suppone che $W_{AP}(Z)$ sia la funzione di trasferimento di un sistema passa-tutto alimentato da un segnale u(t). Essendo per definizione sempre asintoticamente stabile, vale il teorema di Parceval e quindi:

$$\Gamma_y(\omega)=|W_{AP}(e^{j\omega})|^2\Gamma_u(\omega)$$

Ma $|W_{AP}(e^{j\omega})|^2$ è esprimibile come:

$$|W_{AP}(e^{j\omega})|^2=(\frac{1}{a}\frac{e^{j\omega}+a}{e^{-j\omega}+\frac{1}{a}})(\frac{1}{a}\frac{e^{-j\omega}+a}{e^{j\omega}+\frac{1}{a}})$$

$$|W_{AP}(e^{j\omega})|^2=\frac{1}{a^2}\frac{e^{j\omega}e^{-j\omega}+ae^{j\omega}+ae^{-j\omega}+a^2}{e^{j\omega}e^{-j\omega}+\frac{1}{a}e^{-j\omega}+\frac{1}{a}e^{j\omega}+\frac{1}{a^2}}$$

$$|W_{AP}(e^{j\omega})|^2=\frac{1}{a^2}\frac{1+a^2+2\mathrm{a}\cos(\omega)}{1+\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}\cos(\omega)}=1$$

Quindi $\Gamma_y(\omega)=\Gamma_u(\omega)$. D'altra parte il filtro non modifica nemmeno la media del segnale, in quando il suo guadagno è unitario, infatti:

$$\mu_{AP}=W_{AP}(1)=\frac{1}{a}\frac{1+a}{1+\frac{1}{a}}=1\quad .$$

Un ritardo non modifica la funzione di covarianza

Supponendo di avere un segnale $y(t)$ generato da un filtro per cui valga il teorema di Parceval posso scrivere:

$$\Gamma_y(\omega)=|W(e^{j\omega})|^2\Gamma_u(\omega)$$

Supponendo di avere un segnale $\tilde{y}(t)$, identico a $y(t)$ ma in ritardo di k passi, si può scrivere:

$$\Gamma_{\tilde{y}}(\omega)=|W(e^{j\omega})z^{-k}|^2\Gamma_u(\omega)$$

$$\Gamma_{\tilde{y}}(\omega)=|W(e^{j\omega})|^2|e^{-jk\omega}|^2\Gamma_u(\omega)$$

ma $e^{-jk\omega}$ è un numero immaginario puro, quindi il suo modulo è unitario:

$\Gamma_{\tilde{y}}(\omega)=|W(e^{j\omega})|^2 \Gamma_u(\omega)=\Gamma_y(\omega)$.

L'errore di un predittore ARMA ha varianza limitata e crescente in k

L'errore di un predittore di un processo ARMA è definito come:

$\epsilon(k)=E(Z)e(t)$, dove l'espressione di $E(Z)$ dipende da k.

In particolare, per $k=1$ si ha:

$\epsilon(1)=e(t)$ poichè $A(Z)$ e $C(Z)$ sono monici e dello stesso ordine. Dunque:

$V[\epsilon(1)]=V[e(t)]$.

Per $k=2$, invece:

$\epsilon(1)=e(t)+\alpha_1 e(t-1)$ quindi

$V[\epsilon(1)]=V[e(t)]+V[\alpha_1 e(t-1)]$

$V[\epsilon(1)]=V[e(t)]+\alpha_1^2 V[e(t-1)]$

$V[\epsilon(1)]=V[e(t)]+\alpha_1^2 V[e(t)]=V[e(t)](1+\alpha_1^2)$

con α_1 coefficiente opportuno. Per ragioni analoghe:

$V[\epsilon(2)]=V[e(t)](1+\alpha_1^2+\alpha_2^2)$

$V[\epsilon(3)]=V[e(t)](1+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)$

e così via. In particolare per $k>n$ tutto il processo è impredicibile, quindi $\epsilon(t)=y(t)$ e $V[\epsilon(t)]=V[y(t)]$.

Si può quindi concludere che la varianza dell'errore ha minimo assoluto in $k=1$ e vale $V[e(t)]$, è sempre strettamente crescente e ha per massimo la varianza del processo.

Costruzioni

Si suppone sempre un sistema in forma canonica.

Costruzione del predittore per un processo MA(n)

Per definizione e per le ipotesi fatte, il processo può equivalentemente essere espresso nelle forme:

$y(t)=C(Z)e(t)$

e

$y(t)=e(t)+c_1 e(t-1)+...+c_{k-1} e(t-k)+...+c_n e(t-n)$.

Si osserva che dal momento che al tempo t si conoscono i valori di y da $t-n$ a $t-k$ (quelli antecedenti a $t-n$ non influenzano il sistema), quindi non sarà possibile fare una stima dei primi k termini della sommatoria. Si definisce quindi lo stimatore seguente:

$\hat{y}(t|t-k)=c_k e(t-k)+c_{k+1} e(t-k-1)+...+c_n e(t-n)$

Si può dimostrare che $\hat{y}(t|t-k)$ è anche lo stimatore ottimo. Così come è scritto, però, presenta una dipendenza da $e(t)$, che è un dato non osservabile. Si può ricondurre lo stimatore a funzione di dati soltanto osservabili notando che:

$y(t)=C(Z)e(t) \rightarrow e(t)=\frac{1}{C(Z)} y(t)$

quindi

$$\hat{y}(t|t-k)=(c_k z^{-k}+c_{k+1} z^{-k-1}+...+c_n z^{-n})\, e(t)$$

$$\hat{y}(t|t-k)=\frac{c_k z^{-k}+c_{k+1} z^{-k-1}+...+c_n z^{-n}}{1+c_1 z^{-1}+...+c_n z^{-n}}\, y(t) \quad .$$

Costruzione del predittore per un processo ARMA(m,n)

In linea di principio, sapendo che ogni sistema ARMA si può esprimere come MA(∞) si potrebbe pensare di procedere come al punto precedente. Si presenta però il problema di gestire infiniti termini, che praticamente non è accettabile.

Per aggirare il problema si riconduce l'equazione generale dei processi ARMA:

$$y(t)=\frac{C(Z)}{A(Z)} e(t)$$

alla forma detta equazione diofantina, che prevede la divisione dei polinomi $A(Z)$ e $C(Z)$:

$$y(t)=[E(Z)+\frac{\tilde{R}(Z) Z^{-k}}{A(Z)}]\, e(t)$$

dove:

- $E(Z)$ è il risultato della divisione $C(Z)/A(Z)$;
- $R(Z)$ è il resto della divisione $C(Z)/A(Z)$;
- $\tilde{R}(Z)$ è il resto della divisione privato del ritardo, ossia $\tilde{R}(Z)=R(Z) Z^k$;

L'equazione diofantina può essere riscritta come:

$$y(t)=E(Z) e(t)+\frac{\tilde{R}(Z)}{A(Z)} e(t-k) \quad .$$

Si dimostra che $E[Z] e(t)$ è una funzione di $z^{t-1}, z^{t-2}, ... z^{t-k+1}$, ossia non è predicibile al tempo t noti i campioni fino a $t-k$. Si dimostra inoltre che $\frac{\tilde{R}(Z)}{A(Z)} e(t-k)$ dipende solo da campioni fino a t-k, dunque è predicibile. In base a queste informazioni si definisce lo stimatore:

$$\hat{y}(t|t-k)=\frac{\tilde{R}(Z)}{A(Z)} e(t-k)$$

Che si può dimostrare essere ottimo. Analogamente al caso precedente si può rendere lo stimatore dipendente dai dati osservati anziché dal rumore, ossia:

$$\hat{y}(t|t-k)=\frac{\tilde{R}(Z)}{C(Z)} y(t-k) \quad .$$

Costruzione del predittore per un sistema ARMAX

Sia $y(t)$ un sistema ARMAX generico:

$$y(t)=\frac{C(z)}{A(z)} e(t)+\frac{B(z)}{A(z)} u(t-1)$$

Svolgengo k passi della lunga divisione fra $C(z)$ e $A(z)$ si ottiene un quoziente $E(z)$ composto da monomi di grado superiore a $-k$ e un resto $R(z)$ composto da monomi di grado inferiore o uguale a $-k$. Quindi è possibile riscrivere $y(t)$ nella forma:

$$y(t) = E(z)e(t) + \frac{R(z)}{A(z)} e(t) + \frac{B(z)}{A(z)} u(t-1)$$

L'espressione ottenuta si può scomporre in parte predicibile e impredicibile al tempo t-k:

$$y(t) = \hat{y}(t|t-k) + \epsilon(t)$$

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{R(z)}{A(z)} e(t) + \frac{B(z)}{A(z)} u(t-1)$$

$$\epsilon(t) = E(z)e(t)$$

Si dimostra che il predittore $\hat{y}(t|t-k)$ è ottimo. E' possibile anche riscrivere il predittore in funzione di $y(t)$ anziché $e(t)$:

$$y(t) = \frac{C(z)}{A(z)} e(t) + \frac{B(z)}{A(z)} u(t-1)$$

$$A(z)y(t) = C(z)e(t) + B(z)u(t-1)$$

$$A(z)y(t) - B(z)u(t-1) = C(z)e(t)$$

$$e(t) = \frac{A(z)}{C(z)} y(t) - \frac{B(z)}{C(z)} u(t-1)$$

Quindi:

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{R(z)}{A(z)} \left(\frac{A(z)}{C(z)} y(t) - \frac{B(z)}{C(z)} u(t-1)\right) + \frac{B(z)}{A(z)} u(t-1)$$

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{R(z)}{C(z)} y(t) - \frac{R(z)B(z)}{A(z)C(z)} u(t-1) + \frac{B(z)}{A(z)} u(t-1)$$

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{R(z)}{C(z)} y(t) + \frac{B(z)(C(z) - R(z))}{A(z)C(z)} u(t-1)$$

Da come sono stati definiti $R(z)$ ed $E(z)$, vale sempre la relazione:

$C\frac{(z)}{A}(z) = E(z) + R\frac{(z)}{A}(z)$, quindi $C(z) - R(z) = A(z)E(z)$:

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{R(z)}{C(z)} y(t) + \frac{B(z)A(z)E(z)}{A(z)C(z)} u(t-1)$$

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{R(z)}{C(z)} y(t) + \frac{B(z)E(z)}{C(z)} u(t-1) \quad .$$