

Metodi di identificazione

Metodo di identificazione LS per sistemi ARX

Sia $y(t)$ un processo ARX generico con parametri ignoti:

$$S: y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t-1) + \frac{1}{A(z)} e(t)$$

Nota: scegliere $u(t-1)$ è la scelta più generica possibile, al più alcuni coefficienti di $B(z)$ saranno nulli.

Date due serie di osservazioni del sistema Y e U si vuole determinare il “miglior” modello del sistema stesso.

$$Y: y(1) \ y(2) \ y(3) \ \dots \ y(N)$$

$$U: u(1) \ u(2) \ u(3) \ \dots \ u(N)$$

A questo punto si pone la questione di valutare quando un modello è “migliore” di un altro e si sceglie come criterio la capacità del modello stesso di operare buone predizioni. In altre parole un modello è migliore di un altro quando la varianza del suo errore di predizione $V[\epsilon]$ è inferiore. Si pone quindi il problema di calcolare il predittore.

Trattandosi di un sistema ARX, il predittore ottimo è lo stesso degli ARMAX:

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{R(z)}{C(z)} y(t) + \frac{B(z)E(z)}{C(z)} u(t-1)$$

con $C(z)=1$. Inoltre, dato che l'obiettivo è minimizzare $V[\epsilon]$, si sceglie il predittore a un passo (tutti gli altri avrebbero varianza dell'errore più elevata), per cui $E(z)=1$ (per la monicità di $A(z)$ e $C(z)$) e $R(z)=C(z)-A(z)$. Con queste considerazioni il predittore diventa:

$$\hat{y}(t|t-k) = (1-A(z))y(t) + B(z)u(t-1)$$

Si definisce cifra di merito J la varianza dell'errore di predizione:

$$J = V[\epsilon] = \sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t|t-1))^2$$

J è una forma quadratica nell'insieme dei parametri del modello $\theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_p]^T$, quindi ammette sempre uno e un solo minimo, $\hat{\theta}$, calcolabile come:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0$$

Convieni anche definire il “vettore delle osservazioni”:

$$\phi(t) = [-y(t-1) \ -y(t-2) \ \dots \ -y(t-N) \ u(t-1) \ \dots \ u(t-N-1)]^T$$

Che permette di riscrivere il predittore in forma compatta:

$$\hat{y}(t|t-1) = \phi(t)^T \theta$$

Quindi:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{t=1}^N (y(t) - \phi(t)^T \theta)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = -2 \sum_{t=1}^N \phi(t)(y(t) - \phi(t)^T \theta)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = -2 \sum_{t=1}^N \phi(t)y(t) + 2 \sum_{t=1}^N \phi(t)\phi(t)^T \theta$$

$$\sum_{t=1}^N \phi(t)y(t) - \sum_{t=1}^N \phi(t)\phi(t)^T \hat{\theta} = 0$$

$$\sum_{t=1}^N \phi(t)\phi(t)^T \hat{\theta} = \sum_{t=1}^N \phi(t)y(t)$$

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=1}^N \phi(t)\phi(t)^T \right)^{-1} \sum_{t=1}^N \phi(t)y(t)$$

I parametri nel vettore $\hat{\theta}$ determinano il miglior modello ARX per S.

Metodo di identificazione ML per sistemi ARMAX

Sia $y(t)$ un processo ARMAX generico con parametri ignoti:

$$S: y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t-1) + \frac{C(z)}{A(z)} e(t)$$

Date due serie di osservazioni del sistema Y e U si vuole determinare il “miglior” modello del sistema stesso con lo stesso criterio del punto precedente.

Si osserva che in questo caso J non è più una forma quadratica in θ , quindi in generale avrà più di un minimo. Infatti:

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{C(z) - A(z)}{C(z)} y(t) + \frac{B(z)}{C(z)} u(t-1)$$

$$J = \sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t|t-1))^2 = \sum_{t=1}^N \left(y(t) - \frac{C(z) - A(z)}{C(z)} y(t) + \frac{B(z)}{C(z)} u(t-1) \right)^2$$

Si dimostra che non è possibile trovare una formulazione del minimo in forma chiusa, si procede quindi iterativamente in maniera approssimata. Si compie una prima approssimazione cercando il minimo dello sviluppo in serie di Taylor al secondo ordine di J in un punto θ_i anziché J stessa:

$$J(\theta) \approx J(\theta_i) + \frac{\partial J}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} (\theta - \theta_i) + \frac{1}{2} (\theta - \theta_i)^T \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_i} (\theta - \theta_i)$$

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial J}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} + \frac{1}{2} 2 \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_i} (\theta - \theta_i)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} + \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_i} (\hat{\theta} - \theta_i) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} + \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_i} \hat{\theta} - \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_i} \theta_i = 0$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_i} \hat{\theta} = \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_i} \theta_i - \frac{\partial J}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i}$$

$$\hat{\theta} = \theta_i - \left(\frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_i} \right)^{-1} \frac{\partial J}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i}$$

θ_i è la condizione iniziale e generalmente viene fatta variare per evitare di incappare in minimi locali (il calcolo viene ripetuto per diversi valori). Restano da calcolare il gradiente e l'Hessiano di J .

$$J = \sum_{t=1}^N \epsilon(t)^2 \quad (\text{definizione})$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 2 \sum_{t=1}^N \epsilon(t) \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \quad (\text{gradiente})$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} 2 \sum_{t=1}^N \epsilon(t) \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} = 2 \sum_{t=1}^N \left(\frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta}^T + \epsilon(t) \frac{\partial^2 \epsilon(t)}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{Hessiano})$$

$$\hat{\theta} = \theta_i - \left(\sum_{t=1}^N \left(\frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i}^T + \epsilon(t) \frac{\partial^2 \epsilon(t)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_i} \right) \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^N \epsilon(t) \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} \right)$$

A questo punto si opera un'altra approssimazione, supponendo trascurabile la derivata seconda dell'errore di predizione, ottenendo una forma semplificata dell'Hessiano di J :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \approx 2 \sum_{t=1}^N \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta}^T \quad \text{e quindi:}$$

$$\hat{\theta} = \theta_i - \left(\sum_{t=1}^N \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i}^T \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^N \epsilon(t) \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} \right)$$

L'ultima incognita è il calcolo della derivata di ϵ .

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t-1) + \frac{C(z)}{A(z)} e(t)$$

$$\epsilon(t) = e(t) = \frac{A(z)}{C(z)} y(t) - \frac{B(z)}{C(z)} u(t-1)$$

Calcolo la derivata rispetto a ogni possibile variabile:

$$\frac{\partial \epsilon(t)}{\partial a_i} = \frac{1}{C(z)} y(t-i) = \alpha(t)$$

$$\frac{\partial \epsilon(t)}{\partial b_i} = -\frac{1}{C(z)} u(t-i) = \beta(t)$$

$$C(z) \epsilon(t) = A(z) y(t) - B(z) u(t-1)$$

$$\frac{\partial C(z) \epsilon(t)}{\partial c_i} = 0$$

$$z^{-i} \epsilon(t) + C(z) \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial c_i} = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon(t)}{\partial c_i} = -\frac{1}{C(z)} z^{-i} \epsilon(t)$$

$$\frac{\partial \epsilon(t)}{\partial c_i} = -\frac{1}{C(z)} \epsilon(t-i) = \gamma(t)$$

I tre segnali $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ definiscono la derivata dell'errore e sono tutti calcolabili al tempo t . Riassumendo:

$$\hat{\theta} = \theta_i - \left(\sum_{t=1}^N \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^N \epsilon(t) \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} \right)$$

$$\frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} = [\alpha(t-1) \alpha(t-2) \dots \beta(t-1) \dots \gamma(t-1) \dots]^T$$

Metodo di identificazione RLS per sistemi ARX

Questo metodo consente di aggiornare la parametrizzazione di un modello in “tempo reale”, ossia man mano che sono disponibili nuovi dati misurati dal sistema.

Si supponga di avere a disposizione un sistema S modellato da un modello ARX, e di avere a disposizione al tempo $N-1$ una parametrizzazione del modello $\hat{\theta}_{N-1}$ (ad esempio, ottenuta mediante il metodo LS). Occorre individuare un algoritmo di aggiornamento che permetta di calcolare $\hat{\theta}_N$ come scostamento da $\hat{\theta}_{N-1}$, senza riapplicare LS daccapo.

Per costruzione $\hat{\theta}_N$ vale:

$$\hat{\theta}_N = \left(\sum_{t=1}^N \phi(t) \phi(t)^T \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^N \phi(t) y(t) \right)$$

Si pone per definizione:

$$S(N) = \sum_{t=1}^N \phi(t) \phi(t)^T \quad \text{quindi segue:}$$

$$\hat{\theta}_N S(N) = \sum_{t=1}^N \phi(t) y(t)$$

$$S(N) = \sum_{t=1}^{N-1} \phi(t) \phi(t)^T + \phi(N) \phi(N)^T = S(N-1) + \phi(N) \phi(N)^T$$

$$\sum_{t=1}^N \phi(t) y(t) = \sum_{t=1}^{N-1} \phi(t) y(t) + \phi(N) y(N)$$

Allora:

$$\hat{\theta}_N S(N) = \sum_{t=1}^N \phi(t) y(t)$$

$$\hat{\theta}_N S(N) = \sum_{t=1}^{N-1} \phi(t) y(t) + \phi(N) y(N)$$

$$\hat{\theta}_N S(N) = \hat{\theta}_{N-1} S(N-1) + \phi(N) y(N)$$

$$\hat{\theta}_N S(N) = \hat{\theta}_{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} \phi(t) \phi(t)^T + \phi(N) y(N)$$

$$\hat{\theta}_N S(N) = \hat{\theta}_{N-1} \sum_{t=0}^N \phi(t) \phi(t)^T - \phi(N) \phi(N)^T + \phi(N) y(N)$$

$$\hat{\theta}_N S(N) = \hat{\theta}_{N-1} S(N) - \hat{\theta}_{N-1} \phi(N) \phi(N)^T + \phi(N) y(N)$$

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + S(N)^{-1} \phi(N) (y(N) - \phi(N)^T \hat{\theta}_{N-1})$$

ma:

$$\phi(N)\hat{\theta}_{N-1} = \hat{y}(N|N-1)$$

quindi:

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + S(N)^{-1} \phi(N)(y(N) - \hat{y}(N|N-1))$$

Si definisce $K(N) = S(N)^{-1} \phi(N)$ guadagno:

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + K(N)(y(N) - \hat{y}(N|N-1))$$

Riassumendo:

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + K(N)(y(N) - \hat{y}(N|N-1))$$

$$K(N) = S(N)^{-1} \phi(N)$$

$$S(N) = S(N-1) + \phi(N)\phi(N)^T$$

$$\hat{y}(t|t-N) = \phi(N)\hat{\theta}_{N-1}$$

Metodo di identificazione RLS per sistemi ARX, seconda forma

Nella prima forma, la matrice $S(N)$ diverge. Pertanto si definisce una matrice $R(N)$ alternativa, che si dimostra non divergere mai:

$$R(N) = \frac{1}{N} S(N)$$

Da cui segue:

$$S(N) = N R(N)$$

$$N R(N) = (N-1) R(N-1) + \phi(N)\phi(N)^T$$

$$R(N) = \frac{(N-1)}{N} R(N-1) + \frac{\phi(N)\phi(N)^T}{N}$$

Riassumendo:

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + K(N)(y(N) - \hat{y}(t|t-N))$$

$$K(N) = \frac{R(N)^{-1}}{N} \phi(N)$$

$$R(N) = \frac{(N-1)}{N} R(N-1) + \frac{\phi(N)\phi(N)^T}{N}$$

$$\hat{y}(N|N-1) = \phi(N)\hat{\theta}_{N-1}$$

Metodo di identificazione RLS per sistemi ARX, terza forma

Sia la prima che la seconda forma sono onerose dal punto di vista computazionale per via dell'inversione della matrice che richiedono. Esiste una terza forma, equivalente alle prime due, più efficiente dal punto di vista del consumo del tempo processore.

Dal momento che si dimostra che:

$$(F + GHK)^{-1} = F^{-1} - F^{-1}G(H^{-1} + KF^{-1}G)^{-1}KF^{-1}$$

ove questo abbia dimensionalmente senso e le matrici siano invertibili, si può scrivere:

$$S(N)^{-1} = (S(N-1) + \phi(N)\phi(N)^T)^{-1}$$

$$S(N)^{-1} = S(N-1)^{-1} - S(N-1)^{-1} \phi(N) (1 + \phi(N)^T S(N-1)^{-1} \phi(N))^{-1} \phi(N)^T S(N-1)^{-1}$$

e definendo $V(N) = S(N)^{-1}$ la scrittura si semplifica in:

$$V(N) = V(N-1) - V(N-1) \phi(N) (1 + \phi(N)^T V(N-1) \phi(N))^{-1} \phi(N)^T V(N-1) .$$

Riassumendo:

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + K(N) (y(N) - \hat{y}(t|t-N))$$

$$K(N) = V(N) \phi(N)$$

$$V(N) = V(N-1) - V(N-1) \phi(N) (1 + \phi(N)^T V(N-1) \phi(N))^{-1} \phi(N)^T V(N-1)$$

$$\hat{y}(N|N-1) = \phi(N) \hat{\theta}_{N-1} .$$

Metodo di identificazione RML per sistemi ARMAX

Il metodo è definito a partire dall'osservazione che ogni passo del metodo ML è formalmente simile al metodo LS, e la variante ricorsiva si costruisce per analogia.

Infatti ponendo:

$$\psi(t) = - \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} \quad \text{un passo del metodo ML}$$

$$\hat{\theta} = \theta_i - \left(\sum_{t=1}^N \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i}^T \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^N \epsilon(t) \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_i} \right)$$

si può scrivere come

$$\hat{\theta} = \theta_i + (\psi(t) \psi(t)^T)^{-1} (\epsilon(t) \psi(t))$$

che è formalmente simile a:

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + (\phi(t) \phi(t)^T)^{-1} \phi(t) \epsilon(t) \quad (\text{metodo RLS}).$$

Procedendo in maniera simile al punto precedente si pongono le seguenti definizioni:

$$S(t) = \psi(t) \psi(t)^T$$

$$K(N) = S(N)^{-1} \psi(N)$$

$$\phi_E = C(z) \psi(N)$$

$$\epsilon(t) = y(N) - \phi_E(N) \hat{\theta}_{N-1}$$

Da cui:

$$S(N) = S(N-1) + \phi(N) \phi(N)^T \quad \text{e}$$

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + K(N) \epsilon(N) .$$

Metodo di identificazione a minimi quadrati estesi per sistemi ARMAX

Definendo il vettore delle osservazioni estese, comprendente il rumore $e(t)$:

$$\phi_E(t) = [-y(t-1) \quad -y(t-2) \quad \dots \quad -y(t-n) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-p-1) \quad e(t-1) \quad \dots \quad e(t-m)]^T$$

e il vettore dei parametri:

$$\theta = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_p \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_m]^T$$

Si può scrivere il predittore ottimo (dal rumore) ad un passo come:

$$\hat{y}(t|t-1) = \phi_E(t)^T \theta_{t-1}$$

Si nota che, in questa formulazione, il predittore è lineare in θ ; purtroppo però dipende dall'errore $e(t)$ che non è misurabile. Se si ipotizza $e(t) \approx \epsilon(t)$, comunque, si può definire un metodo ricorsivo valido per qualsiasi modello ARMAX.

$$\phi_E(t) \approx [-y(t-1) \quad -y(t-2) \quad \dots \quad -y(t-n) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-p-1) \quad \epsilon(t-1) \quad \dots \quad \epsilon(t-m)]^T$$

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + K(N) \epsilon(N)$$

$$K(N) = S(N)^{-1} \phi_E(N)$$

$$S(N) = S(N-1) + \phi_E(N) \phi_E(N)^T$$

$$\epsilon(N) = y(N) - \phi_E(N)^T \hat{\theta}_{N-1}$$

Metodo di identificazione a variabile strumentale per sistemi ARMAX

Si suppone di voler identificare la parte ARX di un sistema ARMAX:

$$S: y(t) = \frac{B_o(z)}{A_o(z)} u(t-1) + \frac{C_o(z)}{A_o(z)} e(t)$$

$$M: y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t-1) + \frac{1}{A(z)} e(t)$$

I metodi LS e RLS, in questo caso, non garantiscono che $A(z) \rightarrow A_o(z)$, $B(z) \rightarrow B_o(z)$ e $C(z) \rightarrow C_o(z)$, neanche per $N \rightarrow \infty$. Si può dimostrare questa affermazione definendo il vettore dei parametri relativi alla parte ARX:

$$\theta_o = [a_{o,1} \quad a_{o,2} \quad \dots \quad b_{o,0} \quad b_{o,1} \quad \dots \quad b_{o,p-1}]^T$$

E scomponendo $y(t)$ come segue:

$$y(t) = \phi(t)^T \theta_o + d(t)$$

dove $d(t) = e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \dots + c_n e(t-n)$. A questo punto la formulazione del metodo LS si può scrivere come:

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=1}^N \phi(t) \phi(t)^T \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^N \phi(t) y(t) \right)$$

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=1}^N \phi(t) \phi(t)^T \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^N (\phi(t) \phi(t)^T \theta_o + \phi(t) d(t)) \right)$$

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=1}^N \phi(t) \phi(t)^T \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^N \phi(t) \phi(t)^T \right) \theta_o + \left(\sum_{t=1}^N \phi(t) \phi(t)^T \right)^{-1} \sum_{t=1}^N \phi(t) d(t)$$

$$\hat{\theta} = \theta_o + \left(\sum_{t=1}^N \phi(t) \phi(t)^T \right)^{-1} \sum_{t=1}^N \phi(t) d(t)$$

Da quest'ultima scrittura si deduce che l'insieme di parametri $\hat{\theta}$ calcolato dal metodo LS è pari a quello della parte ARX del processo solo se il sistema presenta $\phi(t) \perp d(t)$, ossia se non ha parte a media mobile. In caso contrario, l'algoritmo di identificazione non fornisce il risultato voluto.

Per ovviare al problema si definisce una variante dell'algoritmo che fa uso di una nuova variabile detta strumentale così definita:

$\xi(t)$ p.s.s

- $\xi(t)$ ha lo stesso ordine di $\phi(t)$;
- $E[\xi(t)\phi(t)^T]$ non è singolare, ossia $\xi(t)$ e $\phi(t)$ ben correlate;
- $\xi(t) \perp d(t)$, ossia $E[\xi(t)d(t)]=0$;

In questo caso, utilizzando $\xi(t)$ al posto di $\phi(t)$ si ottiene:

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=1}^N \xi(t)\xi(t)^T \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^N \xi(t)y(t) \right)$$

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=1}^N \xi(t)\xi(t)^T \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^N \xi(t)(\xi(t)^T \theta_o + d(t)) \right)$$

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=1}^N \xi(t)\xi(t)^T \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^N \xi(t)\xi(t)^T \right) \theta_o + \sum_{t=1}^N \xi(t)d(t)$$

Da cui, poiché $\xi(t)$ e $d(t)$ sono scorrelati, segue:

$$\hat{\theta} = \theta_o$$

$\xi(t)$ può essere costruita in diversi modi, ad esempio:

- raccogliendo dati dello stesso sistema da un secondo esperimento con lo stesso ingresso (l'ultima proprietà è verificata dalla definizione di rumore bianco);
- filtrando lo stesso ingresso $u(t)$ con un filtro $\frac{\tilde{B}(z)}{\tilde{A}(z)}$ asintoticamente stabile.