Trasformazioni tra rappresentazioni equivalenti di sistemi lineari SISO, tempo-invarianti, strettamente propri

Ogni sistema Σ può essere equivalentemente rappresentato nelle forme seguenti:

1. Rappresentazione tramite funzione di trasferimento: $y(t)=W(z)u(t)$;
2. Rappresentazione dalla risposta all'impulso: $y(t)=\sum_{k=0}^{N} u(t-k)w(k)$;
3. Rappresentazione di stato tramite le matrici F , G ed H .

1 → 2: da funzione di trasferimento a risposta all'impulso

k passi di lunga divisione tra $B(z)$ e $A(z)$, i coefficienti del risultato sono i primi k campioni della risposta all'impulso, poiché

$$y(t)=E(z)u(t)=e_0 u(0)+e_1 u(1)+...$$

$$y(t)=\sum_{k=0}^{n} u(t-k)w(k)$$

quindi i valori di $w(k)$ sono i coefficienti e_k .

2 → 1: da risposta all'impulso a funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento può essere interpretata come la trasformata Z della risposta all'impulso:

$$W(Z)=Z[w(t)]=\sum_{t=0}^{\infty} w(t)z^{-t} \quad .$$

1 → 3: da funzione di trasferimento a rappresentazione di stato

Valgono le seguenti formule, che individuano (realizzano) un sistema in rappresentazione di stato a partire da una funzione di trasferimento:

$$W(Z)=\frac{b_0 z^{-1}+b_1 z^{-2}+...+b_p-1\, z^{-p}}{a_1 z^{-1} a_2 z^{-2}+...+a_n z^{-n}}$$

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & ... & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & ... & b_0 \end{bmatrix}$$

3 → 1: da rappresentazione di stato a funzione di trasferimento

Per definizione, $W(Z)=H(zI-F)^{-1}G$.

3 → 2: da rappresentazione di stato a risposta all'impulso

Sviluppando il sistema per $t=0$ si ottiene sempre $y(0)=0$ (sistema strettamente proprio), mentre per i passi successivi $y(t)=HF^{t-1}G$.

2 → 3: da risposta all'impulso (esatta) a rappresentazione di stato

Si definisce la matrice di Hankel sulla base dei valori della risposta all'impulso:

$$H_n=\begin{bmatrix} w(1) & w(2) & w(3) & \dots & w(n) \\ w(2) & w(3) & w(4) & \dots & w(n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w(n) & w(n+1) & w(n+2) & \dots & w(2\mathrm{n}-1) \end{bmatrix}$$

n è l'ordine del sistema e può essere dedotto costruendo più matrici di Hankel e calcolandone il rango: n è il più piccolo numero tale che $rango(H_n)=rango(H_{n+1})$.

Dato che:

$$w(t)=HF^{t-1}G$$

si può riscrivere H_n come:

$$H_n=\begin{bmatrix} HG & HFG & HF^2G & \dots & HF^{n-1}G \\ HFG & HF^2G & HF^3G & \dots & HF^nG \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ HF^{n-1}G & HF^nG & HF^{n+1}G & \dots & HF^{2\mathrm{n}-2}G \end{bmatrix}$$

A questo punto, è possibile pensare di fattorizzare la matrice come segue:

$$H_n=\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots \end{bmatrix} \quad \text{ossia} \quad H_n=OR \quad .$$

A questo punto H e G si possono ricavare direttamente da O ed R , mentre F può essere calcolata come rapporto tra le ultime $n-1$ righe di O e le prime $n-1$.

2 → 3: da risposta all'impulso (rumorosa) a rappresentazione di stato

Supponendo di avere a disposizione n campioni rumorosi della risposta all'impulso di un sistema,

$$w(t)=\tilde{w}(t)+e(t)$$

è comunque possibile stimare la rappresentazione di stato. Si definisce una matrice di Hankel con i campioni affetti da rumore, non necessariamente quadrata:

$$H_{n\times p}=\begin{bmatrix} w(1) & w(2) & w(3) & \ldots & w(p) \\ w(2) & w(3) & w(4) & \ldots & w(p+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w(n) & w(n+1) & w(n+2) & \ldots & w(n+p-1) \end{bmatrix}$$

A questo punto si può scomporre la matrice con il metodo SVD, ottenendo

$$H_{n\times p}=U_{n\times n}S_{n\times p}V_{p\times p}$$

Per costruzione del metodo SVD, la matrice $S_{n\times p}$ avrà sulla diagonale principale i "valori singolari" della matrice σ_i in ordine decrescente. E' possibile stimare l'ordine del sistema a seconda di questi valori, poiché generalmente si possono dividere in due insiemi: un primo con elementi positivi decrescenti e un secondo con elementi nulli o prossimi allo zero. Si dimostra che l'ordine del sistema n si può stimare nel numero di elementi appartenenti al primo insieme.

A questo punto si definiscono le matrici

- $\hat{U}$, la matrice delle prime n colonne di U
- $\hat{S}$, la matrice di nord-ovest di ordine n estratta da S
- $\hat{V}$, la matrice delle prime n righe di V
- $\hat{H}=\hat{U}\,\hat{S}\,\hat{V}$

Si può dimostrare che la matrice $\hat{H}$ contiene tutta l'informazione del sistema, e che gli elementi tolti contengono solo la ridondanza ed il rumore dovuti alla rumorosità dei campioni originali della risposta all'impulso. La matrice hat H si può fattorizzare in $\hat{O}$ e $\hat{R}$, come nel caso precedente:

$$\hat{H}=\hat{U}\,\hat{S}^{\frac{1}{2}}\,\hat{S}^{\frac{1}{2}}\,\hat{V}=\hat{O}\,\hat{R}$$

Dalle matrici di osservabilità e raggiungibilità si possono ricavare stime di F , G ed H come al punto precedente.